הרצאה מספר 39
אלגברה 1 מ 104016

הנושא: מטריצת מייצגת ומטריצת מעבר דוגמה מפורטת

דר. נתן ולך

הטכניון – הפקולטה למתמטיקה

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

תזכורת 9.9 הגדרה: מטריצה מייצגת

- הגדרה: יהי $T: V \to V$ א"ל כאשר V נוצר סופית ממימד $\dim V = n$, ויהי $B = \{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n\}$ בסיס סדור של V.
  - נייצג את האיבר $T(\vec{f}_j)$ לפי הבסיס הסדור B:

$$T(\vec{f}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i \text{ כלומר } \left[T(\vec{f}_j)\right]_B = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$

  - המטריצה

$$[T]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \left(\left[T(\vec{f}_1)\right]_B \cdots \left[T(\vec{f}_n)\right]_B\right)$$

נקראת **המטריצה המייצגת** של T לפי הבסיס (הסדור) B.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

תזכורת 9.10 $[T(\vec{v})]_B = [T]_B[\vec{v}]_B$

- <u>משפט:</u> יהי $T : V \to V$ א"ל כאשר V נוצר סופית ממימד n, ויהי $B = \{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n\}$ בסיס סדור של V. אזי לכל $\vec{v} \in V$ מתקיים: $[T(\vec{v})]_B = [T]_B[\vec{v}]_B$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[\cdot]_B}"'] & V \arrow[d, "{[\cdot]_B}"] \\ F^n \arrow[r, "{[T]_B}"] & F^n \end{tikzcd}$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

השלמה: מימד מרחב ההעתקות $\dim(\ L(U,V)\ )$

- הגדרה: יהיו U,V מרחבים וקטורים מעל אותו שדה F.

  מרחב ההעתקות, $L(U,V)$ הוא אוסף כל הט"ל מ־ U ל־ V,

  יחד עם פעולת החיבור והכפל בסקלר שהגדרנו.

- שאלה שטרם עניינו עליה: נניח ש־ $\dim U = n, \dim V = m$.

  מה המימד של $L(U,V)$?

- תשובה:
  - כפי שראינו יש התאמה חח"ע ועל בין אופרטורים לינאריים על מרחב נוצר סופית ומטריצות המייצגת מסדר $n \times n$ יחסית לבסיס סדור קבוע.
  - במקרה שמדובר בט"ל $T : U \to V$ כאשר $\dim U = n, \dim V = m$ מטריצה מייצגת תהיה מסדר $m \times n$.
  - לכן $\dim(\ L(U,V)\ ) = m \cdot n$.
  - בעצם $L(U,V) \cong M_{m\times n}(F)$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

תזכורת 9.16 הגדרה: מטריצת מעבר $P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}$

- <u>הגדרה:</u> יהיו $\mathbf{f}=\{\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_n\}$ ו־ $\mathbf{g}=\{\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_n\}$ שני בסיסים של V.

מטריצת המעבר מבסיס $\mathbf{g}$ אל בסיס $\mathbf{f}$ היא:

$$P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}\vdots & & \vdots\\ \left[\vec{f}_1\right]_{\mathbf{g}} & \cdots & \left[\vec{f}_n\right]_{\mathbf{g}}\\ \vdots & & \vdots\end{pmatrix} & \begin{matrix}g_1\\ \vdots\\ g_n\end{matrix}\end{array}$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

תזכורת 9.17 המשפטים על מטריצת מעבר

- <u>משפט:</u> יהיו $\mathbf{f} = \{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n\}$ ו־ $\mathbf{g} = \{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n\}$ שני בסיסים של V. אזי:

1. $[\vec{v}]_{\mathbf{g}} = P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}[\vec{v}]_{\mathbf{f}}$.
2. $P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}$ הפיכה, ומתקיים: $(P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}})^{-1} = P_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}}$.
3. לכל א"ל $T : V \to V$ מתקיים:

$$[T]_{\mathbf{f}} = P_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}}[T]_{\mathbf{g}}P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}} = (P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}})^{-1}[T]_{\mathbf{g}}P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.23.0 דוגמה: הנתונים

- נעבור על דוגמה מפורטת של חישוב מטריצה מייצגת ומטריצת מעבר.
- <u>הנתונים:</u>
  - $V = F_2[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה שתים ופחות מעל שדה F.
  - אופרטור ליניארי $T : V \to V$ המוגדרת לפי הנוסחה

$$T(ax^2 + bx + c) \quad = \quad cx^2 - (b-c)x + (a-c)$$

לכל פולינום ב־ V.

  - בסיס $\mathbf{e} = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2\}$ של V.
  - בסיס $\mathbf{f} = \{f_1 = -x, f_2 = x^2 + x, f_3 = x + 1\}$ של V.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.23.0 דוגמה: מטרות

1. חישוב של $[T]_{\mathbf{e}}$.
2. בדיקה של הנוסחה $[T(v)]_B = [T]_B[v]_B$ לבסיס $B = \mathbf{e}$.
3. חישוב $[ax^2 + bx + c]_{\mathbf{f}}$.
4. חישוב של $[T]_{\mathbf{f}}$ (באופן ישיר).
5. בדיקה של הנוסחה $[T(v)]_B = [T]_B[v]_B$ לבסיס $B = \mathbf{f}$.
6. מציאת מטריצת המעבר $P_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}$ מבסיס $\mathbf{e}$ לבסיס $\mathbf{f}$.
7. בדיקה של הנוסחה $[v]_{\mathbf{e}} = P_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}[v]_{\mathbf{f}}$.
8. מציאת מטריצת המעבר $P_{\mathbf{f}\to\mathbf{e}}$ מבסיס $\mathbf{f}$ לבסיס $\mathbf{e}$.
9. בדיקה של הנוסחה $[v]_{\mathbf{f}} = P_{\mathbf{f}\to\mathbf{e}}[v]_{\mathbf{e}}$.
10. בדיקה של הנוסחה $[T]_{\mathbf{f}} = P_{\mathbf{f}\to\mathbf{e}}[T]_{\mathbf{e}}P_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.23.1 דוגמה: חישוב של $[T]_{\mathbf{e}}$.

$$T(ax^2+bx+c) \quad = \quad cx^2-(b-c)x+(a-c)$$

$$\mathbf{e}=\{e_1=1, e_2=x, e_3=x^2\}$$

- נחשב קודם את היצוג לפי בסיס $\mathbf{e}$ של התמונות $T(e_j)$:

$$\begin{array}{lcrcrcrcr}
T(e_1)=T(1) & = & x^2+x-1 & = & (-1)1 & + & (1)x & + & (1)x^2 \\
T(e_2)=T(x) & = & -x & = & (0)1 & + & (-1)x & + & (0)x^2 \\
T(e_3)=T(x^2) & = & 1 & = & (1)1 & + & (0)x & + & (0)x^2 \\
 & & & & e_1 & & e_2 & & e_3
\end{array}$$

- נרשום את $[T(e_j)]_{\mathbf{e}}$ כעמודה j של $[T]_{\mathbf{e}}$,
ונרשום את $[ax^2+bx+c]_{\mathbf{e}}$:

$$[T]_{\mathbf{e}}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}e_1\\ e_2\\ e_3\end{array} \qquad [ax^2+bx+c]_{\mathbf{e}}=\begin{pmatrix}c\\ b\\ a\end{pmatrix}$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.23.2 דוגמה: $[T(v)]_{\mathbf{e}} = [T]_{\mathbf{e}}[v]_{\mathbf{e}}$

$$T(ax^2+bx+c) \quad = \quad cx^2-(b-c)x+(a-c)$$

$$\mathbf{e} = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2\}$$

- בדיקה של הנוסחה $[T(v)]_B = [T]_B[v]_B$ לבסיס $B = \mathbf{e}$.
- נחשב:

$$[T]_{\mathbf{e}}[ax^2+bx+c]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c \\ c-b \\ c \end{pmatrix}$$

- ונשים לב שאכן

$$[T(ax^2+bx+c)]_{\mathbf{e}} = [cx^2+(c-b)x+(a-c))]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} a-c \\ c-b \\ c \end{pmatrix}$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.23.3 דוגמה: הקדמה חישוב $[ax^2+bx+c]_{\mathbf{f}}$

$$\mathbf{f} = \{f_1 = -x,\ f_2 = x^2 + x,\ f_3 = x + 1\}$$

- נרצה פעמים רבות בהמשך את היצוג של פולינום $p(x)$ בבסיס f.
לשם כך נשים לב ש

$$\begin{aligned}
\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 &= \alpha(-x) + \beta(x^2 + x) + \gamma(x + 1) \\
&= (\gamma)1 + (-\alpha + \beta + \gamma)x + (\beta)x^2 \\
&= (\gamma)e_1 + (-\alpha + \beta + \gamma)e_2 + (\beta)e_3
\end{aligned}$$

$$[\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \gamma \\ -\alpha + \beta + \gamma \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

כאשר נתיחס למשוואה כמערכת משוואות ליניאריות.

- נסמן ב־ P את המטריצה מסדר 3×3 שקיבלנו.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.23.3 דוגמה: הקדמה חישוב $[ax^2+bx+c]_{\mathbf{f}}$

- נחשב על ידי דירוג את המטריצה ההופכית למטריצה P.

$$(P|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow \quad \begin{array}{lcl} R_1 & \leftrightarrow & R_3 \\ R_1 & \leftrightarrow & R_2 \\ R_1 & \rightarrow & -R_1 \\ R_1 & \rightarrow & R_1+R_2+R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = (I|P^{-1})$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.23.3 דוגמה: הקדמה חישוב $[ax^2+bx+c]_{\mathbf{f}}$

- כדי לחשב את $[ax^2+bx+c]_{\mathbf{f}}$ נפתור את הממ"ל:

$$[\alpha f_1+\beta f_2+\gamma f_3]_{\mathbf{e}} = P\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\ b\\ a\end{pmatrix} = [ax^2+bx+c]_{\mathbf{e}}$$

על ידי

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}c\\ b\\ a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\ b\\ a\end{pmatrix}$$

$$(\star) \qquad [ax^2+bx+c]_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix}c-b+a\\ a\\ c\end{pmatrix}$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.23.4 דוגמה: חישוב של $[T]_{\mathbf{f}}$

$$T(ax^2+bx+c) \quad = \quad cx^2-(b-c)x+(a-c)$$

$$\mathbf{f}=\{f_1=-x,\ f_2=x^2+x,\ f_3=x+1\}$$

$$(\star) \qquad [ax^2+bx+c]_{\mathbf{f}} = (\ c-b+a,\ \ a,\ \ c\ )^t$$

- נחשב קודם את היצוג לפי בסיס $\mathbf{f}$ של התמונות $T(f_j)$ בעזרת $(\star)$.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
T(f_1) & = & x & = & (-1)(-x) & + & (0)(x^2+x) & + & (0)(x+1) \\
T(f_2) & = & -x+1 & = & (2)(-x) & + & (0)(x^2+x) & + & (1)(x+1) \\
T(f_3) & = & x^2 \quad -1 & = & (0)(-x) & + & (1)(x^2+x) & + & (-1)(x+1) \\
 & & & & f_1 & & f_2 & & f_3
\end{array}$$

- נרשום את $[T(f_j)]_{\mathbf{f}}$ כעמודה j של $[T]_f$,
ונרשום את $[ax^2+bx+c]_{\mathbf{f}}$:

$$[T]_{\mathbf{f}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \qquad [ax^2+bx+c]_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} c-b+a \\ a \\ c \end{pmatrix}$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.23.5 דוגמה: $[T(v)]_{\mathbf{f}} = [T]_{\mathbf{f}}[v]_{\mathbf{f}}$

$$(\star) \qquad [ax^2+bx+c]_{\mathbf{f}} = (\ c-b+a,\ \ a,\ \ c\ )^t$$

- בדיקה של הנוסחה $[T(v)]_B = [T]_B[v]_B$ לבסיס $B = \mathbf{f}$.

$$[T]_{\mathbf{f}}[ax^2+bx+c]_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c-b+a \\ a \\ c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -c+b+a \\ c \\ a-c \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} f_1 &= -x \\ f_2 &= x^2+x \\ f_3 &= x+1 \end{aligned}$$

$$[T(ax^2+bx+c)]_{\mathbf{f}} = [cx^2-(b-c)x+(a-c)]_{\mathbf{f}}$$

$$= \begin{pmatrix} -c+b+a \\ c \\ a-c \end{pmatrix}$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.23.6 דוגמה: חישוב $P_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}$

- <u>תזכורת</u>:

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \{f_1 = -x, f_2 = x^2 + x, f_3 = x + 1\}\\ \mathbf{e} &= \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2\}\end{aligned}$$

- מציאת מטריצת המעבר $P_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}$ מבסיס $\mathbf{e}$ לבסיס $\mathbf{f}$.
לפי ההגדרה בעמודה j צריך לרשום את $[f_j]_{\mathbf{e}}$.

$$P_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} \end{array} \qquad \begin{aligned} e_1 &= 1 \\ e_2 &= x \\ e_3 &= x^2 \end{aligned}$$

- <u>שימו לב</u>: את המטריצה הזאת ראינו למעלה, וכבר חישבנו את ההופכי שלה.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.23.7 דוגמה: $[v]_{\mathbf{e}} = P_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}[v]_{\mathbf{f}}$

- ראינו בעבר ש־

$$[\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

- וכן

$$P_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad [\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3]_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

- לכן הנוסחה $[v]_{\mathbf{e}} = P_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}[v]_{\mathbf{f}}$ אכן מתקיימת.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.23.8 דוגמה: חישוב $P_{\mathbf{f}\to\mathbf{e}}$

$$\mathbf{f} = \{f_1 = -x, f_2 = x^2 + x, f_3 = x + 1\}$$

$$(\star) \qquad [ax^2 + bx + c]_{\mathbf{f}} = (\ c - b + a,\ \ a,\ \ c\ )^t$$

- על מנת לחשב את מטריצת המעבר $P_{\mathbf{f}\to\mathbf{e}}$ נחשב קודם את היצוג של אברי $\mathbf{e}$ לפי בסיס $\mathbf{f}$ בעזרת $(\star)$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
e_1 & = & 1 & = & (1)(-x) & + & (0)(x^2+x) & + & (1)(x+1) \\
e_2 & = & x & = & (-1)(-x) & + & (0)(x^2+x) & + & (0)(x+1) \\
e_3 & = & x^2 & = & (1)(-x) & + & (1)(x^2+x) & + & (0)(x+1) \\
 & & & & f_1 & & f_2 & & f_3
\end{array}$$

- לפי ההגדרה בעמודה j יש לרשום $[e_j]_{\mathbf{f}}$.

$$P_{\mathbf{f}\to\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} f_1 = -x \\ f_2 = x^2 + x \\ f_3 = x + 1 \end{array}$$

- זאת ההופכית של $P = P_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}$ שראינו למעלה.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.23.9 דוגמה: $[v]_{\mathbf{f}} = P_{\mathbf{f}\to\mathbf{e}}[v]_{\mathbf{e}}$

- כשחישבנו את היצוג $[v]_{\mathbf{f}} = [ax^2+bx+c]_{\mathbf{f}}$ קיבלנו את המשוואה:

$$[ax^2+bx+c]_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

שבו מופיע המטריצה $P^{-1} = P_{\mathbf{f}\to\mathbf{e}}$ הכופלת את $[v]_{\mathbf{e}}$.

- בזאת בדקנו שהנוסחה $[v]_{\mathbf{f}} = P_{\mathbf{f}\to\mathbf{e}}[v]_{\mathbf{e}}$ מתקיימת.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.23.10 דוגמה: $[T]_{\mathbf{f}} = P_{\mathbf{f}\to\mathbf{e}}[T]_{\mathbf{e}}P_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}$

- בדיקה של הנוסחה $[T]_{\mathbf{f}} = P_{\mathbf{f}\to\mathbf{e}}[T]_{\mathbf{e}}P_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}}$.

$$
\begin{aligned}
P_{\mathbf{f}\to\mathbf{e}}[T]_{\mathbf{e}}P_{\mathbf{e}\to\mathbf{f}} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = [T]_{\mathbf{f}}
\end{aligned}
$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות